Przykład 2.3. (Dynamika populacyjna w czasie ciągłym) Jeśli rozważamy populacje bez wyróżniających się sezonów rozrodczych, które mogą być obserwowane w dowolnym czasie, to powinniśmy rozważać modele opisujące zmiany zachodzące w sposób ciągły. Odpowiednikiem dyskretnego modelu maltuzjańskiego (2.14) w czasie ciągłym jest

$$\frac{dP}{dt} = r_0 P. \tag{2.20}$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, którego rozwiązaniem jest funkcja

$$P(t) = P(t_0)e^{r_0(t-t_0)}, \tag{2.21}$$

gdzie $P(t_0)$ jest wielkością populacji w chwili t_0.

Analogicznie do przypadku z czasem dyskretnym model (2.20) nie jest realistyczny, zwłaszcza dla dużych t. Argumentując podobnie jak poprzednio, możemy rozważyć model logistyczny z czasem ciągłym

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \quad P(t_0) = P_0, \tag{2.22}$$

gdzie r jest naturalnym współczynnikiem wzrostu, a K jest pojemnością środowiska. Równanie to jest też równaniem o zmiennych rozdzielonych, które przy założeniu, że $P(t) \neq 0$ i $P(t) \neq K$ można zapisać jako

$$\frac{1}{rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)} \frac{dP}{dt} = 1.$$

Całkując obie strony od t_0 do t i wykorzystując warunek początkowy, otrzymujemy

$$\frac{K}{r} \int\limits_{P_0}^{P} \frac{ds}{s(K-s)} = t - t_0.$$

Stosując rozkład na ułamki proste, dostajemy

$$\frac{K}{r} \int\limits_{P_0}^{P} \frac{ds}{(K-s)s} = \frac{1}{r} \int\limits_{P_0}^{P} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{K-s}\right) ds = \frac{1}{r} \ln \frac{P}{P_0} \left|\frac{K-P_0}{K-P}\right|.$$

Można udowodnić (patrz przykład 3.2), że jeśli $0 < P_0 < K$, to $P(t) < K$ dla wszystkich $t > t_0$. Podobnie, jeśli $P_0 > K$, to dostajemy $P(t) > K$ dla $t > t_0$. Zatem $(K - P_0)/(K - P(t)) > 0$, więc

$$r(t - t_0) = \ln \frac{P}{P_0} \frac{K - P_0}{K - P},$$

co, po krótkich rachunkach, daje

$$P(t) = \frac{P_0 K}{P_0 + (K - P_0)e^{-r(t-t_0)}}. \tag{2.23}$$

Aby zilustrować powyższe wyniki, musimy znać parametry w obu modelach. Użyjemy tutaj wartości podanych w książce [15], przytoczonych za U.S. Department of Commerce. Według tych danych populacja na świecie w 1965 roku wynosiła 3,34 miliardy i w dekadzie 1960–1970 wzrastała w przeciętnym tempie 2% rocznie. Zatem $P(t_0) = P(1965) = 3{,}34 \cdot 10^9$, zaś $r = 0,02$, i (2.21) przyjmuje postać

$$P(t) = 3{,}34 \cdot 10^9 e^{0,02(t-1965)}.$$

W modelu logistycznym obserwowany współczynnik wzrostu w chwili t_0 można zapisać jako

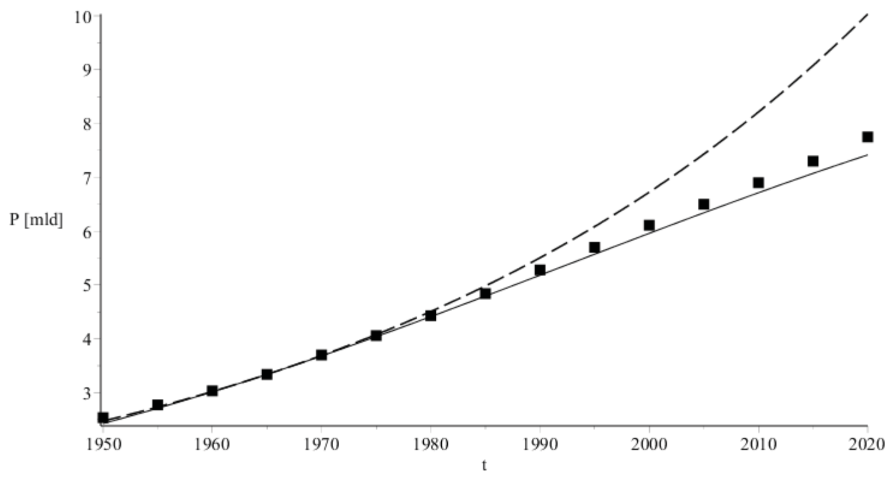
$$r_0 = r\left(1 - \frac{P(t_0)}{K}\right).$$

Zgodnie z [15] przyjmiemy $r = 0{,}029$, co dla $P(t_0) = 3{,}34 \cdot 10^9$ daje $K = 10{,}76$ miliardów. Otrzymamy wówczas równość

$$P(t) = \frac{(3{,}34 \cdot 10^9)(10{,}76 \cdot 10^9)}{3{,}34 \cdot 10^9 + ((10{,}76 \cdot 10^9) - (3{,}34 \cdot 10^9))e^{-0,029(t-1965)}}.$$

Na rysunku 2.1 jest przedstawione porównanie obserwowanych wartości populacji świata z przewidywaniami opartymi na modelu maltuzjańskim i logistycznym.

Choć model logistyczny jest wciąż zbyt prosty, aby można go było wykorzystywać w poważnych badaniach demograficznych, ma on wiele jakościowych



Rysunek 2.1. Populacja świata. Dane rzeczywiste (punkty), wzrost maltuzjański (linia kreskowa) i wzrost logistyczny (linia ciągła)